Universidad Simón Bolívar
Depto. de Matemáticas
Puras y Aplicadas

MA1112 Secciones 01 y 04

VERANO DE 2005

EJERCICIOS SOBRE INTEGRAL INDEFINIDA.

1.- Explique que diferencia hay entre los conceptos de "integral indefinida" y "primitiva" .
[nota : primitiva es sinónimo de antiderivada].

2.- Recuerde que el teorema del valor medio afirma lo siguiente :
si f es una función continua en el intervalo cerrado [a, b] y derivable en el intervalo abierto (a, b) entonces existe almenos un número $c \in (a, b)$ [es decir : $a< c< b$] tal que sea :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f\,'(c)\,.$$

Usando el teorema del valor medio <u>demuestre</u> que si f es continua y derivable en todo **R** y si F(x) es una antiderivada de f entonces toda antiderivada de f se obtiene con la fórmula F(x) + C .

3.- Observe que $F(x)= \text{arctg}(x)$ y $G(x)=1- \text{arctg}(\frac{1}{x})$ son dos antiderivadas de $\frac{1}{1+x^2}$ y sin embargo es <u>falso</u> que $G(x)= F(x)+C$, ya que $F(x)-G(x)$ no es constante. [por ejemplo : $F(1)-G(1) = 2.\text{arctg}(1)+1 = \frac{\pi}{2} + 1$ mientras que $F(-1)-G(-1) = - 2.\text{arctg}(1)+1 = -\frac{\pi}{2} + 1$.
<u>Explique</u> por qué esto no está en contradicción con lo visto en el ejercicio anterior.

4.- Halle las integrales indefinidas siguientes, usando una tabla de derivadas y la propiedad de linealidad de la integral indefinida.
[nota : la propiedad de <u>linealidad</u> se expresa en la forma siguiente :

$$\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx+ \int g(x)dx \;;$$

$$\int kf(x)dx = k.\int f(x)dx \quad \text{, es decir :}$$

la integral de la suma es igual a la suma de las integrales y la integral de una constante por una función es igual a la constante por la integral de la función] .

4a) $\int (2.x^3+7.x+19)dx$; **4b)** $\int (\text{sen}(5x)+\cos(7x))dx$; **4c)** $\int (\sqrt{x} +5\sqrt[3]{x})^2dx$;

4d) $\int \frac{3}{x^2+1}dx$; **4e)** $\int \frac{3+4x^2}{x^2+1} dx$; **4f)** $\int (\text{sen}(5x).\cos(7x))dx$;

4g) $\int \tan^2(x)dx$; **4h)** $\int \tan^2(5x)dx$; **4i)** $\int \text{sen}^2(x)dx$.

5.- Usando la "<u>regla generalizada de la potencia</u>" , halle las siguientes integrales :

Universidad Simón Bolívar
Depto. de Matemáticas
Puras y Aplicadas

MA1112 Secciones 01 y 04

VERANO DE 2005

5a) $\int \mathrm{sen}^2(x)\cos(x)dx$; **5b**) $\int \mathrm{sen}(2x)\cos(x)dx$; **5c)** $\int \frac{3\mathrm{sen}^2(x)\cos(x)}{(7+\mathrm{sen}^3(x))^2}dx$;

5d) $\int \frac{\sqrt{\mathrm{arctg}(x)}}{1+x^2}\, dx$; **5e**) $\int \frac{\mathrm{arcsen}^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$; **5f**) $\int \frac{\sqrt{3+\tan(x)}}{\cos^2(x)}\, dx$.

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS 1 hasta 5.

1) La integral definida es <u>el conjunto de todas</u> las antiderivadas o primitivas de la función dada. Entonces una primitiva es un elemento del conjunto "integral indefinida".

2) Una consecuencia del teorema del valor medio es que una función continua en [a, b], derivable en (a, b) con derivada nula [en todo punto de (a, b)] es una constante; entonces si F, G son dos antiderivadas de una misma función f, resulta que (G - F) ' =G ' - F ' = f-f = 0, por lo cual G - F es una función constante, es decir G(x) = F(x) + C .

3) La función F(x)= arctg(x) es continua y derivable en todo R , mientras que la función $G(x)=1-\mathrm{arctg}(\frac{1}{x})$ es continua y derivable en cualquier intervalo que <u>no contenga el cero</u>; por el resultado del ejercicio **2**) entonces resulta que en todos los reales positivos se tiene $G(x)-F(x) = C_1$= constante , análogamente en todos los reales negativos se tiene $G(x)-F(x) = C_2$= constante pero no hay motivo por el cual las dos constantes deban ser la misma ya que si $a < 0 < b$, en el intervalo [a, b] no se cumplen las hipótesis del teorema del valor medio para la función G - F [ya que en x=0 G no está definida].

4a) $\int (2.x^3+7.x+19)dx = \frac{1}{2}x^4+\frac{7}{2}x^2+19\, x + C$;

4b) $\int (\mathrm{sen}(5x)+\cos(7x))dx = -\frac{1}{5}\cos(5x) +\frac{1}{7}\mathrm{sen}(7x) + C$;

4c) $\int (\sqrt{x} +5\sqrt[3]{x})^2dx = \int (x+25.x^{2/3}+10.x^{5/6})dx = \frac{x^2}{2} +15.x^{5/3}+\frac{60}{11}x^{11/6} +C$;

4d) $\int \frac{3}{x^2+1}dx = 3.\mathrm{arctg}(x) + C$; **4e**) $\int \frac{3+4x^2}{x^2+1}\, dx = \int(4 - \frac{1}{x^2+1})dx= 4x - \mathrm{arctg}(x) + C$;

4f) sumando miembro a miembro las las fórmulas de trigonometría :
sen(a+b) = sen(a)cos(b)+sen(b)cos(a)
sen(a-b) = sen(a)cos(b)-sen(b)cos(a) , se obtiene :
2.sen(a)cos(b) = sen(a+b) + sen(a-b) , por lo cual, poniendo a=5x , b= 7x se tiene :
2sen(5x).cos(7x) = sen(5x+7x) + sen(5x-7x) = sen(12x) - sen(2x) . Entonces :

$\int (\text{sen}(5x).\cos(7x))dx = \frac{1}{2}\int \text{sen}(12x)dx - \frac{1}{2}\int \text{sen}(2x)dx = -\frac{1}{24}\cos(12x) + \frac{1}{4}\cos(2x) + C$;

4g) $\int \tan^2(x)dx = \int (\sec^2(x) - 1)dx = \tan(x) - x + C$;

4h) $\int \tan^2(5x)dx = \int (\sec^2(5x) - 1)dx = \frac{1}{5}\tan(5x) - x + C$;

4i) De la fórmula : $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b)-\text{sen}(a)\text{sen}(b)$ se obtiene
$\cos(2a) = \cos^2(a)-\text{sen}^2(a) = 1- 2\text{sen}^2(a)$ por lo cual $\text{sen}^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}$. Entonces :

$$\int \text{sen}^2(x)dx = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}dx = \int \frac{1}{2}dx - \int \frac{\cos(2x)}{2}dx = \frac{x}{2} - \frac{\text{sen}(2x)}{4} + C.$$

5a) $\int \text{sen}^2(x)\cos(x)dx = \frac{\text{sen}^3(x)}{3} + C$;

5b) $\int \text{sen}(2x)\cos(x)dx = \int 2\text{sen}(x)\cos^2(x)dx = -2\int \cos^2(x)(-\text{sen}(x))dx =$

$= -2\frac{\cos^3(x)}{3} + C$;

5c) $\int \frac{3\text{sen}^2(x)\cos(x)}{(7+\text{sen}^3(x))^2}dx = \int (f(x))^{-2}f'(x)\,dx = \frac{-1}{(7+\text{sen}^3(x))} + C$;

5d) $\int \frac{\sqrt{\text{arctg}(x)}}{1+x^2}dx = \frac{2}{3}(\text{arctg}(x)^{3/2} + C$;

5e) $\int \frac{\text{arcsen}^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{3}(\text{arcsen}(x))^3 + C$;

5f) $\int \frac{\sqrt{3+\tan(x)}}{\cos^2(x)}dx = \int \sec^2(x).\sqrt{3+\tan(x)}\,dx = \int f'(x)(f(x))^{1/2}dx =$

$= \frac{2}{3}(3+\tan(x))^{3/2} + C$.

Universidad Simón Bolívar
Depto. de Matemáticas
Puras y Aplicadas

MA1112 Secciones 01 y 04

VERANO DE 2005

EJERCICIOS SOBRE NOTACION SIGMA

6.- Escriba cada una de las siguientes sumas en forma explícita, sin el símbolo sigma :

6a) $\sum_{k=1}^{4} (2k+3)$; **6b**) $\sum_{k=2}^{5} (2k+1)$; **6c**) $\sum_{k=3}^{8} (2^k-1)$;

6d) $\sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right)$; **6e**) $\sum_{j=1}^{8} (x-1).x^j$; **6f**) $\sum_{s=1}^{4} f(c_s)(x_s-x_{s-1})$.

7.- Escriba con la notación "sigma" cada una de las siguientes sumas :
7a) $3+4+5+6+7$; **7b**) $1+8+15+22+29+36+43$; **7c**) $-2+1+6+13+...+118$;
7d) $x^2+3x^4+5x^6+7x^8+9x^{10}+11x^{12}$; **7e**) $1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+...+x^{100}$.

EJERCICIOS SOBRE SUMAS DE RIEMANN Y CALCULO DE AREAS.

8.- En cada caso, con la función dada y con el intervalo y la partición que se indican :
i) halle la <u>norma</u> de la partición;
ii) escriba la suma de Riemann que se obtiene tomando $c_i = x_{i+1}$ = segundo extremo del i-ésimo intervalo de la partición ;
iii) escriba la suma de Riemann que se obtiene tomando c_i = punto del i-ésimo intervalo en donde la función toma su máximo en el intervalo mismo [esta suma se llama una "suma superior"] ;
iv) escriba la suma de Riemann que se obtiene tomando c_i = punto del i-ésimo intervalo en donde la función toma su mínimo en el intervalo mismo [esta suma se llama una "suma inferior"] ;

8a) $f(x)= 2x-1$, $[a, b] = [0, 2]$, $P= (0, \frac{1}{2}, 1, \frac{7}{4}, 2)$;

8b) $f(x)= x^2$, $[a, b] = [-1, 4]$, $P= (-1, -\frac{1}{3}, +\frac{1}{2}, 3, 4)$;

8c) $f(x) = 1-|x|$, $[a, b] = [-3, 5]$, $P= (-3, -2, 1, 3, 5)$.

9.- Calcule las areas de las siguientes figuras planas, por medio del límite de una conveniente suma de Riemann.

9a) $\{(x,y)\in R^2 \mid 1 \le x \le 3 , 0 \le y \le \frac{x}{2} \}$;

9b) $\{(x,y)\in R^2 \mid -1 \le x \le 2 , 0 \le y \le x^2 \}$;

9c) $\{ (x,y)\in R^2 \mid 0 \le x \le 2 , 2x - x^2 \le y \le x+1 \}$.

10.- En una próxima clase se definirá ln(4) como el área de la figura:

$$\{(x,y)\in R^2 \mid 1 \le x \le 4 , 0 \le y \le \frac{1}{x} \} ;$$

Usando una suma inferior de Riemann de la función definida por $f(x)=\frac{1}{x}$ en el intervalo [0, 4] con la partición P = (1, 2, 3, 4) , <u>demuestre</u> que $\ln(4) > 1$.

Universidad Simón Bolívar
Depto. de Matemáticas
Puras y Aplicadas

MA1112 Secciones 01 y 04

VERANO DE 2005

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS 6 hasta 10.

6a) $\sum_{k=1}^{4} (2k+3) = (2.1+3)+(2.2+3)+(2.3+3)+(2.4+3) = 5+7+9+11$;

6b) $\sum_{k=2}^{5} (2k+1) = (2.2+1)+(2.3+1)+(2.4+1)+(2.5+1) = 5+7+9+11$;

6c) $\sum_{k=3}^{8} (2^k-1) = (8-1)+(16-1)+(32-1)+(64-1)+(128-1)+(256-1) =$
$7+15+31+63+127+255$;

6d) $\sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right) = \left(\frac{1}{2} - 1\right)+\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \ldots +\left(\frac{1}{11} - \frac{1}{10}\right) = -1 + \frac{1}{11} = \frac{-10}{11}$;

6e) $\sum_{j=1}^{8} (x-1).x^j = (x^2-x)+(x^3-x^2)+\ldots+(x^9-x^8) = x^9- x$;

6f) $\sum_{s=1}^{4} f(c_s)(x_s-x_{s-1}) = f(c_1)(x_1-x_0)) + f(c_2)(x_2-x_1)) + f(c_3)(x_3-x_2)) + f(c_4)(x_4-x_3))$;

7a) $3+4+5+6+7 = \sum_{i=3}^{7} i = \sum_{i=1}^{5} (i+2) = \sum_{i=20}^{24}(i-17)$ [no hay una respuesta única] ;

7b) $1+8+15+22+29+36+43 = \sum_{i=0}^{6} (1+7i) = \sum_{i=1}^{7} (1+7(i-1))$;

7c) $-2+1+6+13+\ldots+118 = \sum_{i=1}^{11} (i^2-3)$;

7d) $x^2+3x^4+5x^6+7x^8+9x^{10}+11x^{12} = \sum_{i=1}^{6}(2i-1)x^{2i}$;

7e) $1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\ldots+x^{100} = \sum_{i=0}^{100} (-x)^i = \sum_{i=0}^{100} ((-1)^i x^i))$.

8a) $f(x)= 2x-1$, $[a, b] = [0, 2]$, $P= \left(0, \frac{1}{2}, 1, \frac{7}{4}, 2 \right)$;

i) $|P| = \frac{3}{4}$; ii) $f(\frac{1}{2})\ (\frac{1}{2} - 0) + f(1)\ (1-\frac{1}{2}) + f(\frac{7}{4})\ (\frac{7}{4} - 1) + f(2)\ (2 - \frac{7}{4}) =$

$= 0.\frac{1}{2} + 1.\ \frac{1}{2} + \frac{5}{2} . \frac{3}{4} + 3.\frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{15}{8} + \frac{3}{4} = \frac{25}{8}$;

iii) suma superior = U(f, P) = la misma que ii) ya que la función dada es creciente y por lo tanto el máximo en cada intervalo de la partición se obtiene al final del intervalo mismo;

iv) suma inferior = $L(f, P) = f(0)(\frac{1}{2} - 0) + f(\frac{1}{2})(1-\frac{1}{2}) + f(1)(\frac{7}{4} - 1) + f(\frac{7}{4})\ (2 - \frac{7}{4}) =$

$= -1.\ \frac{1}{2} + 0..\frac{1}{2} + 1.\ \frac{3}{4} + \frac{5}{2} .\frac{1}{4} = \frac{7}{8}$;

8b) $f(x)= x^2$, $[a, b] = [-1, 4]$, $P= (-1, -\frac{1}{3} , +\frac{1}{2} , 3, 4)$.

i) $|P| = \frac{5}{2}$; ii) $f(\frac{-1}{3})\ \frac{2}{3} + f(\frac{1}{2})\ \frac{5}{6} + f(3)\ \frac{5}{2} + f(4).1 = \frac{2}{27} + \frac{5}{24} + \frac{45}{2} + 16$;

iii) $U(f, P) = f(-1)\ \frac{2}{3} + f(\frac{1}{2})\ \frac{5}{6} + f(3)\ \frac{5}{2} + f(4).1 = \frac{2}{27} + \frac{5}{24} + \frac{45}{2} + 16$;

iv) $L(f, P) = f(\frac{-1}{3})\ \frac{2}{3} + f(\frac{-1}{3})\ \frac{5}{6} + f(\frac{1}{2})\ \frac{5}{2} + f(3).1 = \frac{2}{27} + \frac{5}{54} + \frac{5}{8} + 9$.

8c) $f(x) = 1-|x|$, $[a, b] = [-3, 5]$, $P= (-3, -2, 1, 3, 5)$.

$|P| = 3$; ii) $f(-2).1+f(1).3+f(3).2+f(5).2 = -1 - 4 - 8 = - 13$;

iii) $f(-2).1+f(0).3+f(1).2+f(3).2 = -1 + 3 -4 = -2$;

iv) $f(-3).1+f(-2).3+f(3).2+f(5).2 = -2 - 3 - 4 - 8 = -17$.

9a) $\{(x,y)\in R^2 \mid 1 \le x \le 3 , 0 \le y \le \frac{x}{2} \}$; $f(x) = \frac{x}{2}$,

$x_0=1$, $\Delta x= \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n}$, $x_k=1+k.\frac{2}{n}$; $f(x_k) = f(1+k.\frac{2}{n}) = \frac{1}{2} + \frac{k}{n}$;

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x) = \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{2} + \frac{k}{n})\ \frac{2}{n}\ ) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1 + \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = 1 + \frac{2}{n^2}\ \frac{n(n+1)}{2} = 1 + (1+\frac{1}{n})\ ;$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + (1+\frac{1}{n})\right) = 2$;

9b) $\{(x,y)\in R^2 \mid -1 \le x \le 2 ,\ 0 \le y \le x^2 \}$; $f(x) = x^2$; $x_0=-1$, $\Delta x= \frac{3}{n}$;

$x_k= -1 + k\frac{3}{n}$; $\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(-1 + k\frac{3}{n}\right)^2 \frac{3}{n} = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(1 + k^2\frac{9}{n^2} - 6\frac{k}{n}\right)\frac{3}{n} =$

$= \frac{3}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(1) + \frac{27}{n^3}\sum\limits_{k=1}^{n}(k^2) - \frac{18}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}(k) = 3 + \frac{27}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{18n(n+1)}{n^2\ \ 2} =$

$=3 + \frac{9}{2}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n}) - 9(1+\frac{1}{n})$; $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = \lim\limits_{n\to\infty}\left(3+ \frac{9}{2}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n}) - 9(1+\frac{1}{n})\right)= 3.$

9c) $\{ (x,y)\in R^2 \mid 0 \le x \le 2 ,\ 2x - x^2 \le y \le x+1 \}$.

$f(x) = x+1 - (2x - x^2) = x^2- x + 1$; $\Delta x= \frac{2}{n}$; $x_0= 0$, $x_k= k.\frac{2}{n}$;

$\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x) = \sum\limits_{k=1}^{n}\left(x_k^2- x_k + 1\right)\frac{2}{n} = \sum\limits_{k=1}^{n}\left(4\frac{k^2}{n^2} - k.\frac{2}{n} + 1 \right)\frac{2}{n} =$

$= \frac{8}{n^3}\sum\limits_{k=1}^{n}(k^2) - \frac{4}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}(k) + \frac{2}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(1) = \frac{8}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4\,n(n+1)}{n^2\ \ 2} + 2 =$

$= \frac{4}{3}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n}) - 2(1+\frac{1}{n}) + 2$;

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{3}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n}) - 2(1+\frac{1}{n}) + 2 = \frac{8}{3}$.

10.- $L(f, P) = f(2).1+f(3).1+f(4).1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{6+4+3}{12} = \frac{13}{12} > 1$;
como L(f, P) proporciona una aproximación por defecto del área, se tiene :

$1 < L(f, P) = \frac{13}{12} < \ln(4)$ luego $\ln(4) > 1$.

Universidad Simón Bolívar
Depto. de Matemáticas
Puras y Aplicadas

EJERCICIOS SOBRE TEOREMAS FUNDAMENTALES DEL CALCULO Y PROPIEDADES DE LA INTEGRAL.

11.- Use el segundo teorema fundamental del cálculo (y la definición de integral definida) para calcular los siguiente límites de sumas de Riemann :

11a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1})$, con $f(x) = 2x + \text{sen}\left(\frac{x}{3}\right)$, $x_0 = 2$, $x_n = 5$;

11b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{x_k + x_{k-1}}{2}\right)(x_k - x_{k-1})$, con $f(x) = x + \sqrt{x}$, $x_0 = 0$, $x_n = 4$.

12.- Calcule las áreas de las tres figuras del ejercicio **9** :

9a) $\{(x,y) \in R^2 \mid 1 \le x \le 3 \, , \, 0 \le y \le \frac{x}{2}\}$;

9b) $\{(x,y) \in R^2 \mid -1 \le x \le 2 \, , \, 0 \le y \le x^2\}$;

9c) $\{(x,y) \in R^2 \mid 0 \le x \le 2 \, , \, 2x - x^2 \le y \le x+1\}$

expresándolas por medio de una integral definida y calculando la integral usando el segundo teorema fundamental del cálculo.

13.- Demuestre las siguientes desigualdades, aplicando en forma conveniente la propiedad de comparación para integrales definidas :

13a) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{x^2 + \sqrt{\text{sen}(x)} + \cos^2(x)} dx \le 2$; **13b)** $0 < \int_0^{\pi/4} \text{sen}^8(x)\, dx \le \frac{\pi}{64}$.

14.- Calcule las siguiente integrales definidas usando el segundo teorema fundamental del cálculo y la propiedad de aditividad sobre intervalos :

14a) $\int_0^{\pi} [[x]]\, dx$, [siendo [[x]] = "parte entera de x "] ;

14b) $\int_{-2}^{2} |x^3 - x|\, dx$; **14c)** $\int_0^{\pi/3} |\tan(x) - 1|\, dx$.

15.-Halle la derivada de cada una de las siguientes funciones :

15a) $G(x) = \int_0^{x} \text{sen}(x^2)dx$; **15b)** $G(x) = \int_2^{3x} \text{sen}(x^2)dx$;

15c) $G(x) = \int_{2x}^{3} \text{sen}(x^2)dx$; **15d)** $\int_0^{x^2} \text{sen}(x^2)dx$;

15e) $G(x) = \int_{2x}^{3x} \text{sen}(x^2)dx$; **15f)** $\int_{-x^3}^{x^2} \text{sen}(x^2)dx$.

16.- Demuestre que la gráfica de la función definida por $F(x) = \int_2^{x} \tan(x^2)dx$

tiene un mínimo local en $x = \sqrt{\pi}$.

Universidad Simón Bolívar
Depto. de Matemáticas
Puras y Aplicadas

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS 11 hasta 16.

11a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k-x_{k-1}) = \int_2^5 (2x+\text{sen}(\frac{x}{3}))dx = [\, x^2 - 3.\cos(\frac{x}{3})]_2^5 =$

$= (25 - 3.\cos(\frac{5}{3}) - (4 - 3.\cos(\frac{2}{3}) = 21 + 3.\cos(\frac{2}{3}) - 3.\cos(\frac{5}{3})$;

11b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\frac{x_k+x_{k-1}}{2})(x_k-x_{k-1}) = \int_0^4 (\, x+\sqrt{x}\,)dx = [\, \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x^{3/2})]_0^4 =$

$= (\, 8 + \frac{16}{3}) - 0 = \frac{40}{3}$.

11) Areas expresadas por medio de integrales definidas :

9a) $\{(x,y)\in R^2 \mid 1 \le x \le 3 \,,\, 0 \le y \le \frac{x}{2}\}$; $\int_1^3 \frac{x}{2}\,dx = [\, \frac{x^2}{4}\,]_1^3 = 2$;

9b) $\{(x,y)\in R^2 \mid -1 \le x \le 2 \,,\, 0 \le y \le x^2\}$; $\int_{-1}^2 x^2\,dx = [\, \frac{x^3}{3}\,]_{-1}^2 = 3$;

9c) $\{\,(x,y)\in R^2 \mid 0 \le x \le 2 \,,\, 2x - x^2 \le y \le x+1\,\}$,

$\int_0^2 ((x+1)-(2x - x^2))dx = \int_0^2 (\, x^2-x+1)dx = [\, \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\,]_0^2 = \frac{8}{3}$.

13a) $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{x^2+\sqrt{\text{sen}(x)}+\cos^2(x)}\,dx \le 2$.

$\frac{\cos(x)}{x^2+\sqrt{\text{sen}(x)}+\cos^2(x)} \le \frac{\cos(x)}{\sqrt{\text{sen}(x)}} \Rightarrow I \le \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\text{sen}(x)}}\,dx = 2$;

13b) $0 \le \int_0^{\pi/4} \text{sen}^8(x)\,dx \le \frac{\pi}{64}$. En el intervalo $[0, \pi/4\,]$ se tierne :

$0 \le \text{sen}(x) \le \frac{\sqrt{2}}{2}$ luego $0 \le \text{sen}^8(x) \le (\frac{\sqrt{2}}{2})^8 = \frac{1}{16}$, por lo cual :

$0 \le \int_0^{\pi/4} \text{sen}^8(x)\,dx \le \int_0^{\pi/4} \frac{1}{16}\,dx = \frac{\pi}{64}$.

14a) $\int_0^{\pi} [[x]]\,dx = \int_0^1 [[x]]\,dx + \int_1^2 [[x]]\,dx + \int_2^3 [[x]]\,dx + \int_3^{\pi} [[x]]\,dx =$

$= \int_0^1 0\,dx + \int_1^2 1\,dx + \int_2^3 2dx + \int_3^\pi 3\,dx = 0+1+2+3(\pi-3) = 3\pi- 6$;

14b) $\int_{-2}^{2} |x^3-x|dx = \int_{-2}^{-1}(x-x^3)dx + \int_{-1}^{0}(x^3-x)dx + \int_0^1 (x-x^3)dx + \int_1^2 (x^3-x)dx =$

$= [\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}]_{-2}^{-1} + [\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}]_{-1}^{0} + [\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}]_0^1 + [\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}]_1^2 =$

$= [(\frac{1}{2} - \frac{1}{4})-(2-4)] + [0 - (\frac{1}{4} - \frac{1}{2})] + [(\frac{1}{2} - \frac{1}{4})- 0] + [(4-2) - ((\frac{1}{4} - \frac{1}{2})] = 5$;

14c) $\int_0^{\pi/3} |\tan(x) - 1|\sec^2(x)\,dx = \int_0^{\pi/4} (1 - \tan(x))\sec^2(x)\,dx + \int_{\pi/4}^{\pi/3} (\tan(x) - 1)\sec^2(x)\,dx =$

$= [\tan(x) - \frac{\tan^2(x)}{2}]_0^{\pi/4} + [\frac{\tan^2(x)}{2} - \tan(x)]_0^{\pi/4} = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - 0) = 1$.

15a) $G(x) = \int_0^x \mathrm{sen}(x^2)dx$, $G'(x) = \mathrm{sen}(x^2)$;

15b) $G(x) = \int_2^{3x} \mathrm{sen}(x^2)dx$, $G'(x) = 3.\mathrm{sen}(9x^2)$;

15c) $G(x) = \int_{2x}^{3} \mathrm{sen}(x^2)dx = - \int_3^{2x} \mathrm{sen}(x^2)dx$, $G'(x) = - 2.\mathrm{sen}(4x^2))$;

15d) $\int_0^{x^2} \mathrm{sen}(x^2)dx$, $G'(x) = 2x.\mathrm{sen}(x^4)$;

15e) $G(x) = \int_{2x}^{3x} \mathrm{sen}(x^2)dx = \int_0^{3x} \mathrm{sen}(x^2)dx - \int_0^{2x} \mathrm{sen}(x^2)dx$,

$G'(x) = 3.\mathrm{sen}(9x^2) - 2.\mathrm{sen}(4x^2)$;

15f) $\int_{-x^3}^{x^2} \mathrm{sen}(x^2)dx = \int_0^{x^2} \mathrm{sen}(x^2)dx - \int_0^{-x^3} \mathrm{sen}(x^2)dx$,

$G'(x) = 2x.\mathrm{sen}(x^4) - (-3x^2)\,\mathrm{sen}(x^6) = 2x.\mathrm{sen}(x^4) +3x^2\,\mathrm{sen}(x^6)$.

16.- $F(x) = \int_2^x \tan(x^2)dx$; $F'(x) = \tan(x^2)$; $F'(\sqrt{\pi}) = \tan(\pi) = 0$;

$F''(x) = 2x.\sec^2(x^2)$; $F''(\sqrt{\pi}) = 2\sqrt{\pi}.\sec^2(\pi) = 2\sqrt{\pi} > 0$, por lo tanto F(x) tiene un mínimo local en $x = \sqrt{\pi}$.

Universidad Simón Bolívar
Depto. de Matemáticas
Puras y Aplicadas

EJERCICIOS SOBRE INTEGRACION POR SUSTITUCION Y CALCULO DE AREAS.

17.- Calcule las siguientes integrales usando sustituciones cuando sea conveniente :

17a) $\int x.\mathrm{sen}(x^2)\,dx$; **17b**) $\int \frac{2x}{1+x^4}\,dx$; **17c**) $\int_3^{14}\sqrt{3x+7}\,dx$;

17d) $\int \frac{1}{\sqrt{2x-7}}\,dx$; **17e**) $\int x.\sqrt[3]{x+3}\,dx$; **17f**) $\int \frac{1+4x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

17g) $\int x.\sqrt[3]{x^2+3}\,dx$; **17h**) $\int x^2\tan^2(x^3)\,dx$; **17i**) $\int \frac{\mathrm{sen}(\sqrt{3x})}{\sqrt{5x}}\,dx$;

17j) $\int \frac{x}{2}.\cos^2(3x^2+17-\sqrt{3})\,dx$; **17k**) $\int_{27/8}^{125/8} \frac{\sqrt[3]{x}.\cos(\pi.\sqrt[3]{x})}{x}\,dx$;

17l) $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$; **17m**) $\int (2x+1)\sqrt{1-x^2}\,dx$.

18.- Conociendo que $\int_1^2 f(x)\,dx = 7$, $\int_2^4 f(x)\,dx = 5$, halle : $\int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$.

19.- Halle el área de cada una de las siguiente regiones del plano :

19a) $\{(x, y)\in R^2 \mid 0 \le x \le 2 , 0 \le y \le 2x-x^2 \}$;
19b) $(x, y)\in R^2 \mid 0 \le x \le 2 , x^2-4x \le y \le 2x-x^2 \}$;
19c) la región acotada por la parábola de ecuación $y = 2x-x^2$ y la recta de ecuación $3x-4y - 6 = 0$;
19d) la región acotada por la curva de ecuación $y = x^3 -12x$ y su recta tangente en el pto. A(3, -9) ;
19e) la región acotada por el segmento OA, el segmento AB y el arco BO de la parábola de ecuación $y^2+4y-x = 0$, siendo los ptos. O(0, 0) . A(5, 1), B(0, -4) ;
19f) la región acotada por el segmento AB , el arco BO de la parábola de ecuación $y = x^2+2x$ y el arco OA de la circunferencia de ecuación $x^2+y^2-2y = 0$, siendo los ptos. O(0, 0) . A(-1, 1), B(-2, 0) ;
19g) Exprese por medio de dos integrales definidas el área de la región acotada por las tres arcos : OA, de la parábola de ecuación $9y= x^2$, OB de la parábola de ecuación $y= x^2-4x$, AB, de la parábola de ecuación $y= (x-4)^2$ siendo los ptos. O(0, 0) , A(3, 1) , B(4, 0) .

Universidad Simón Bolívar
Depto. de Matemáticas
Puras y Aplicadas

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS 17-18-19.

17a) Poniendo $x^2=u \Rightarrow \int x.\text{sen}(x^2)\,dx = \int \frac{1}{2}\,\text{sen}(u)du = \frac{1}{2}.(-\cos(u)) = \frac{-1}{2}\cos(x^2)) + C$

17b) $\int \frac{2x}{1+x^4}\,dx = \text{arctg}(x^2) + C$;

17c) Poniendo $3x+7 = u^2 \Rightarrow \int\sqrt{3x+7}\,dx = \int \frac{2}{3}u^2du = \frac{2}{9}u^3+C = \frac{2}{9}(3x+7)^{3/2}+C$;

$\int_3^{14}\sqrt{3x+7}\,dx = [\,\frac{2}{9}(3x+7)^{3/2}]_3^{14} = \frac{2}{9}(343-64) = 62$;

17d) Poniendo $u^2 = 2x-7 \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{2x-7}}\,dx = \sqrt{2x-7} + C$;

17e) Poniendo $x+3= u^3 \Rightarrow \int x.\sqrt[3]{x+3}\,dx = \frac{3}{28}(4x^2+3x-27)\sqrt[3]{x+3} + C$;

17f) $\int \frac{1+4x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int \frac{4x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \text{arcsen}(x) - 4\sqrt{1-x^2} + C$;

17g) Poniendo $x^2+3 = u^3 \Rightarrow \int x.\sqrt[3]{x^2+3}\,dx = \frac{3}{8}(x^2+3)^{4/3} + C$

[también podía usarse la sustitución $x^2+3 = u$] ;

17h) Poniendo $x^3=u \Rightarrow \int x^2\tan^2(x^3)\,dx = \int \frac{1}{3}(\sec^2(u)-1)\,du = \frac{1}{3}(\tan(x^3) - x^3)+C$;

17i) Poniendo $\sqrt{3x} = u \Rightarrow 3x=u^2$, $dx=\frac{2}{3}u.du$, $\int \frac{\text{sen}(\sqrt{3x})}{\sqrt{5x}}\,dx = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\int \frac{\text{sen}(\sqrt{3x})}{\sqrt{3x}}\,dx =$

$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \int \frac{\text{sen}(u)}{u} \frac{2}{3} u.du = - \frac{2}{\sqrt{15}} \cos(u) = - \frac{2}{\sqrt{15}} \cos(\sqrt{3x}\,) + C$;

17j) Poniendo $3x^2+17-\sqrt{3} = u \Rightarrow x.dx = \frac{1}{6} du$, $\int \frac{x}{2}.\cos^2(3x^2+17-\sqrt{3})\, dx =$

$= \frac{1}{12} \int \cos^2(u)\, du = \frac{1}{24} \int (1+\cos(2u)\,)\, du = \frac{3x^2+17-\sqrt{3}}{24} + \frac{\text{sen}(6x^2+34-2\sqrt{3})}{48} + C$

17k) Poniendo $\sqrt[3]{x}.=u$, se tiene $\int \frac{\sqrt[3]{x}.\cos(\pi.\sqrt[3]{x})}{x}\, dx = \int \frac{u.\cos(\pi u).}{u^3} 3u^2 du =$

$= \int 3\cos(\pi u)du = \frac{3}{\pi} \text{sen}(\pi u) + C$; luego $\int_{27/8}^{125/8} \frac{\sqrt[3]{x}.\cos(\pi.\sqrt[3]{x})}{x}\, dx = [\, \frac{3}{\pi} \text{sen}(\pi u)\,]_{3/2}^{5/2} = \frac{6}{\pi}$;

17l) Poniendo x= sen(u) se tiene : dx= cos(u).du , $\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \int \cos^2(u).du =$

$= \frac{1}{2} \int (1+\cos(2u))du = \frac{1}{2} (u + \frac{\text{sen}(2u)}{2}\,) = \frac{1}{2} (u + \text{sen}(u).\cos(u)\,) =$

$= \frac{1}{2} (\, \text{arcsen}(x) + x.\sqrt{1-x^2}\,) + C$;

17m) $\int (2x+1)\sqrt{1-x^2}\, dx = \int 2x.\sqrt{1-x^2}\, dx + \int \sqrt{1-x^2}\, dx =$

$= \frac{-2}{3} (1-x^2)^{3/2} + \frac{1}{2} (\, \text{arcsen}(x) + x.\sqrt{1-x^2}\,) + C$.

18.- Poniendo $\sqrt{x} = u$, se tiene : $\int \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = \int 2.f(u).du$, luego

$\int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = \int_1^2 2.f(u).du = 14.$

Universidad Simón Bolívar
Depto. de Matemáticas
Puras y Aplicadas

19a) $\{(x, y)\in R^2 \mid 0 \le x \le 2 , 0 \le y \le 2x-x^2 \}$; $\int_0^2 (2x-x^2)dx$;

19b) $(x, y)\in R^2 \mid 0 \le x \le 2 , x^2-4x \le y \le 2x-x^2 \}$;

$\int_0^3 [(2x-x^2) - (x^2-4x)]\, dx = \int_0^3 [(6x-2x^2)\, dx$;

19c) la región acotada por la parábola de ecuación $y = 2x-x^2$ y la recta de ecuación $3x-4y - 6 = 0$;

$\int_{-3/4}^{2} [(2x-x^2) - \frac{3x-6}{4}]dx$;

19d) la región acotada por la curva de ecuación $y = x^3 -12x$ y su recta tangente en el pto. A(3, -9) ;

Recta tangente en A : $y = 15x-54$; intersecciones de la recta tangente con la curva :

A(3, -9) , B(-6, -144) ; $\int_{-6}^{3} [(x^3 -12x) - (15x-54)]\, dx$;

19e) la región acotada por el segmento OA, el segmento AB y el arco BO de la parábola de ecuación $y^2+4y-x = 0$, siendo los ptos. O(0, 0) . A(5, 1), B(0, -4) ;

$\int_{-4}^{1} [(y+4)- (y^2+4y)]\, dx$; también :

$\int_{-4}^{0} [(-2+\sqrt{x+4})-(-2- \sqrt{x+4})]\, dx + \int_0^5 [(-2+\sqrt{x+4})-(x-4)]\, dx$;

19f) la región acotada por el segmento AB , el arco BO de la parábola de ecuación $y = x^2+2x$ y el arco OA de la circunferencia de ecuación $x^2+y^2-2y = 0$, siendo los ptos. O(0, 0) . A(-1, 1), B(-2, 0) ;

$\int_{-2}^{-1} [(x+2) - (x^2+2x)]dx + \int_{-1}^{0} [(1-\sqrt{1-x^2}) - (x^2+2x)]dx$;

19g) Exprese por medio de dos integrales definidas el área de la región acotada por las tres arcos : OA, de la parábola de ecuación $9y= x^2$, OB de la parábola de ecuación $y= x^2-4x$, AB, de la parábola de ecuación $y= (x-4)^2$ siendo los ptos. O(0, 0) , A(3, 1) , B(4, 0) .

$\int_0^3 [\frac{x^2}{9} - (x^2-4x)]\, dx + \int_3^4 [(x-4)^2 - (x^2-4x)]\, dx$.

Universidad Simón Bolívar
Depto. de Matemáticas
Puras y Aplicadas

EJERCICIOS SOBRE LOGARITMO NATURAL Y FUNCION EXPONENCIAL

20) Sean a, b números reales positivos ;
20a) demuestre que ln(ab)=ln(a)+ln(b) usando la propiedad de aditividad sobre intervalos y verificando, por medio de una conveniente sustitución, que : $\int_a^{ab} \frac{1}{t}\,dt = \int_1^{b} \frac{1}{t}\,dt$;

20b) tomando en cuenta que ln(x) es función inyectiva, demuestre que $(e^a)^b = e^{ab}$.

21) Resuelva las siguientes ecuaciones [siendo e=2,718281.... el único número real cuyo logaritmo natural es =1] :

21a) $\ln(1-x^2) = \frac{1}{2} + \ln(1+x)$; **21b)** $\ln(1-x^2) = e + \ln(1+x)$;

21c) $e^x.e^{x^2} = 1$; **21d**) $e.\sqrt{e^x}\,(e^x)^2.e^{(x^2)} = \sqrt{e}.e^x$;

21e) $\ln(x^3) + 2.\ln(x) + \ln(\frac{1}{x}) = 8$; **21f**) $\ln(2x)+\ln(3x^2) = \ln(6) + 9$.

22) Verifique que : $\int \sec(x)\,dx = \ln(\sec(x)+\tan(x)) + C$.

23) Calcule las siguientes integrales (usando algún método que sea conveniente) :

23a) $\int \tan(x).dx$; **23b**) $\int \frac{x}{3+5x^2}\,dx$; **23c**) $\int \frac{x+x^3}{1+x^4}dx$;**23d**) $\int \sqrt{x^6+2x^4+x^2}\,dx$;

23e) $\int \frac{\ln(x)}{x}dx$; **23f**) $\int \frac{\ln(2x+3)}{4x+6}dx$; **23g)** $\int \frac{\ln(\sqrt{5x})}{7x}dx$);

23h) $\int \sqrt{e^2}\,dx$; **23i**) $\int \sqrt{e^x}\,dx$; **23j**) $\int \sqrt{7.e^{3x}}\,dx$;

23k) $\int \frac{e^x}{1+e^x}dx$; **23l**) $\int \frac{1}{1+e^x}\,dx$; **23m**) $\int \sqrt{\frac{e^x}{1-e^x}}\,dx$.

24) Derive las siguientes funciones, usando el método de la "derivada logarítmica" :

24a) $f(x) = e^x.\ln(x).x^3$; **24b**) $f(x) = \frac{x^3}{(1+x^3).\mathrm{sen}(x)}$; **24c**) $f(x) = e^x.\sqrt{x}$.

24d) $f(x) = u(x)v(x)w(x)$.

Universidad Simón Bolívar
Depto. de Matemáticas
Puras y Aplicadas

MA1112 Secciones 01 y 04

VERANO DE 2005

EJERCICIOS SOBRE LOGARITMOS Y EXPONENCIALES NO NATURALES

25) para todo número real positivo, a, se define $a^x = e^{x.\ln(a)}$;

25a) demuestre que si $0 < a < 1$ la función a^x es decreciente en todo R mientras que si $a > 1$ la función a^x es creciente en todo R ;

25b) El hecho que para todo a positivo $\neq 1$, la función

$a^x : (-\infty , +\infty) \rightarrow (0 , + \infty)$ es inyectiva, permite definir $\log_a(x)$ como la función inversa de a^x ; demuestre (tomando en cuenta que la función exponencial es inyectiva) que se tiene : $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$.

Observación importante.

las dos identidades : $a^x = e^{x.\ln(a)}$, $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$ son muy útiles para transformar problemas que involucran exponenciales en base cualquiera y logaritmos en base cualquiera en problemas que involucren solamente exponenciales y logaritmos naturales.

26) tomando en cuenta [cuando sea conveniente] que $f(x)^{g(x)} = e^{g(x).\ln(f(x))}$ halle la derivada de cada una de las siguientes funciones :

26a) $x^{\text{sen}(x)}$; **26b**) $(\text{sen}(x))^x$; **26c)** $(1+x)^{1/x}$; **26d**) $(\sqrt{x+4}\,)^{\tan(x)}$.

Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de las cuatro funciones de este ejercicio en el punto indicado :

26aa) $A(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$; **26bb**) $B(\frac{\pi}{2} , 1)$; **26cc**) $C(1, 2)$; **26dd**) $D(0, 1)$.

27) Calcule las siguientes integrales :

27a) $\displaystyle\int \frac{\log_a(x)}{x}dx$; **27b**) $\displaystyle\int_0^1 10^x\, dx$; **27c**) $\displaystyle\int \frac{(2^x+3^x)^2}{6^x}dx$;

27d) $\displaystyle\int \frac{5^x}{1+5^x}dx$; **27e**) $\displaystyle\int \frac{1}{1+7^x}\, dx$; **27f**) $\displaystyle\int \frac{\ln(\log_3(x))}{x.\log_5(x)}\, dx$;

27g) $\displaystyle\int x.7^{(x^2)}\, dx$; **27h**) $\displaystyle\int \frac{3.(\ln(5x^2))^2}{x}\, dx$; **27i)** $\displaystyle\int \frac{1+\ln(x)}{x.\ln(x)}dx$;

27j) $\displaystyle\int \frac{1+\ln(x)}{x.\log_{10}(x)}\, dx$; **27k**) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{5 - 4.\text{sen}(x) - 4.\cos^2(x)}\ ) \cos(x)dx$.

Universidad Simón Bolívar
Depto. de Matemáticas
Puras y Aplicadas

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS 20 hasta 27.

20a) usando la sistitución $t = a.u$ se tiene : $\int_a^{ab} \frac{1}{t}\,dt = \int_1^{b} \frac{1}{au}(a.du) = \int_1^{b} \frac{1}{t}\,dt$;

20b) $\ln((e^a)^b) = b(\ln(e^a) = ba.\ln(e) = ba = \ln(e^{ab}))$; otra manera de demostrarlo puede ser la siguiente : $(e^a)^b = e^{b.\ln(e^a)} = e^{b.a.\ln(e)} = e^{a.b}$.

21a,b) resolvamos la ecuación $\ln(1-x^2) = a + \ln(1+x)$;
si x es solución de la ecuación, debe ser : $\ln(\frac{1-x^2}{1+x}) = \ln(1-x) = a \Rightarrow x = 1- e^a$ y como los argumentos $1-x^2$, $1+x$ de los logarítmos deben ser positivos , se debe cumplir que $-1 < x < 1$. Por consiguiente $x= 1- e^a$ es solución de la ecuación dada si y sólo si $-1 < 1- e^a < 1$ es decir, si y sólo si $e^a < 2$ lo cual se cumple si y sólo si $a < \ln(2)$.
Considerando la suma de Riemann inferior para la función $\frac{1}{x}$ en el intervalo [1, 2] con la partición P=(1, 2) se constata que $\frac{1}{2} < \ln(2)$, mientras que $\ln(2)< 1 < e$.
Se concluye entonces que la ecuación **21a)** tiene solución $x= 1-e^{1/2} = 1-\sqrt{e}$, mientras que la ecuación **21b)** no tiene solución.

21c) $x_1= 0$, $x_2= -1$; **21d**) $x_1=-1$, $x_2= -\frac{1}{2}$; **21e**) $x = e^2$; **21f**) $x = e^3$.

22) La derivada de $\ln(\sec(x)+\tan(x))$ es : $\frac{\sec(x).\tan(x)+\sec^2(x)}{\sec(x)+\tan(x)} = \sec(x)$.

23a) $\int \tan(x).dx = -\ln|\cos(x)| = \ln|\sec(x)| + C$;

23b) $\int \frac{x}{3+5x^2}\,dx = \frac{\ln(3+5x^2)}{10} + C$;

23c) poniendo $u = x^2$, $v = x^4$: $\int \frac{x+x^3}{1+x^4}dx = \int \frac{x}{1+x^4}dx + \int \frac{x^3}{1+x^4}dx =$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u^2}du + \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+v}\,dv = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}(x^2) + \frac{1}{4}\ln(1+x^4) + C ;$$

23d) $\int \sqrt{x^6+2x^4+x^2}\, dx = \int |x|(x^2+1)\, dx = \frac{|x|}{4}(x^3+2x) + C$;

23e) $\int \frac{\ln(x)}{x} dx = \frac{(\ln(x))^2}{2} + C$; **23f)** $\int \frac{\ln(2x+3)}{4x+6} dx = \frac{(\ln(2x+3))^2}{4} + C$;

23g) $\int \frac{\ln(\sqrt{5x})}{7x} dx = \frac{1}{14} \int \frac{\ln(5)+\ln(x)}{x} dx = \frac{\ln(5)}{14} \ln|x| + \frac{1}{28}(\ln(x))^2 + C$;

23h) $\int \sqrt{e^2}\, dx = \sqrt{e^2}\, x + C$; **23i)** $\int \sqrt{e^x}\, dx = 2\sqrt{e^x} + C$;

23j) $\int \sqrt{7.e^{3x}}\, dx = \sqrt{7} \int e^{3x/2}\, dx = \frac{2\sqrt{7}}{3} \sqrt{e^{3x}} + C$;

23k) $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \ln(1+e^x) + C$; **23l)** $\int \frac{1}{1+e^x} dx = x - \ln(1+e^x) + C$;

23m) $\int \sqrt{\frac{e^x}{1-e^x}}\, dx = 2.\text{arcsen}(\sqrt{e^x}) + C$.

24a) $\ln(|y|) = \ln(| e^x.\ln(x).x^3|) = x + \ln(|\ln(x)|) + 3.\ln(|x|) \Rightarrow$

$\Rightarrow y' = y(1 + \frac{1}{x.\ln(x)} + \frac{3}{x}) = e^x.\ln(x).x^3 + e^x.x^2 + 3\, e^x.\ln(x).x^2$;

24b) $f(x) = \frac{x^3}{(1+x^3).\text{sen}(x)} \Rightarrow \ln|f(x)| = 3.\ln(|x|) - \ln(|1+x^3|) - \ln(|\text{sen}(x)|) \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x) = f(x)(\frac{3}{x} - \frac{3x^2}{1+x^3} - \text{ctg}(x))$;

24c) $f(x) = e^x.\sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = e^x.\sqrt{x}\,(1 + \frac{1}{2x}) = e^x.\sqrt{x} + \frac{e^x}{2\sqrt{x}}$;

24d) $f(x) = u(x)v(x)w(x) \Rightarrow$

$f'(x) = f(x)(\frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{v'(x)}{v(x)} + \frac{w'(x)}{w(x)}) = u'(x)v(x)w(x) + u(x)v'(x)w(x) + u(x)v(x)w'(x)$.

25a) $(a^x)' = (e^{x.\ln(a)})' = a^x.\ln(a)$; como $a^x > 0$ (¿¿ por qué ??) y
como $\ln(a) < 0$ si $0 < a < 1$ mientras que $\ln(a) > 0$ si $1 < a$, se constata que
si $0 < a < 1$ la función a^x es decreciente en todo R
mientras que si $1 < a$ la función a^x es creciente en todo R ;
$\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)} \Leftrightarrow \ln(a).\log_a(x) = \ln(x) \Leftrightarrow e^{\ln(a).\log_a(x)} = e^{\ln(x)}$ y esta última igualdad es
cierta, ya que se tiene : $e^{\ln(a).\log_a(x)} = a^{\log_a(x)} = x$, $e^{\ln(x)} = x$.

26a) $(x^{\text{sen}(x)})' = (e^{\text{sen}(x).\ln(x)})' = e^{\text{sen}(x).\ln(x)}[\text{sen}(x).\ln(x)]' = (x^{\text{sen}(x)})[\cos(x).\ln(x)+\dfrac{\text{sen}(x)}{x}]$;

26aa) $\dfrac{2y-\pi}{2x-\pi} = f'(\dfrac{\pi}{2}) = \dfrac{\pi}{2}[\,0+\dfrac{2}{\pi}\,] \Rightarrow \dfrac{2y-\pi}{2x-\pi} = 1 \Rightarrow \quad y = x$;

26b) $(\text{sen}(x))^x = (e^{x.\ln(\text{sen}(x))})' = e^{x.\ln(\text{sen}(x))}[x.\ln(\text{sen}(x))\,]' = (\text{sen}(x))^x[\ln(\text{sen}(x))+x.\text{ctg}(x)\,]$;

26bb) $\dfrac{y-1}{x-(\pi/2)} = f'(\dfrac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow y-1 = 0$;

26c) ($(1+x)^{1/x})' = (1+x)^{1/x}[\dfrac{\ln(1+x)}{x}]' = (1+x)^{1/x}[\dfrac{1}{x.(x+1)} - \dfrac{\ln(1+x)}{x^2}]$;

26cc) $\dfrac{y-2}{x-1} = f'(1) = 2.[\dfrac{1}{2} - \ln(2)] \Rightarrow \dfrac{y-2}{x-1} = 1 - \ln(4)$;

26d) $((\sqrt{x+4})^{\tan(x)})' = (\sqrt{x+4})^{\tan(x)}[\tan(x).\ln(\sqrt{x+4})]' =$
$= (\sqrt{x+4})^{\tan(x)}\dfrac{1}{2}[\sec^2(x).\ln(\sqrt{x+4})+\dfrac{\tan(x)}{x+4}]$;

26dd) $\dfrac{y-1}{x} = f'(0) = \dfrac{1}{2}.\ln(2)$.

27a) $\displaystyle\int \frac{\log_a(x)}{x}dx = \int \frac{\ln(x)}{x.\ln(a)}dx = \frac{1}{\ln(a)}\frac{(\ln(x))^2}{2} + C$;

27b) $\displaystyle\int_0^1 10^x\,dx = \int_0^1 e^{x.\ln(10)}\,dx = \frac{1}{\ln(10)}[10^x]_0^1 = \frac{9}{\ln(10)}$;

27c) $\displaystyle\int \frac{(2^x+3^x)^2}{6^x}dx = \int ((\frac{4}{6})^x+(\frac{9}{6})^x+2)dx = \frac{(2/3)^x}{\ln(2/3)} + \frac{(3/2)^x}{\ln(3/2)} + 2x + C$;

27d) poniendo $a = \ln(5)$ y luego $u=e^{ax}$ tenemos :

$\displaystyle\int \frac{5^x}{1+5^x}dx = \int \frac{e^{ax}}{1+e^{ax}}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+u}\,du = \frac{\ln(1+u)}{a} = \frac{\ln(1+5^x)}{\ln(5)} + C$;

Universidad Simón Bolívar
Depto. de Matemáticas
Puras y Aplicadas

27e) $\int \frac{1}{1+7^x}\,dx = \int \left(1 - \frac{7^x}{1+7^x}\right) dx = x - \frac{\ln(1+7^x)}{\ln(7)} + C$;

27f) Observemos que $\frac{\ln(\log_3(x))}{x.\log_5(x)} = \frac{\ln(\ln(x)) - \ln(\ln(3))}{x.\ln(x)}\ln(5)$, luego , poniendo $u = \ln(x)$

tenemos: $\int \frac{\ln(\log_3(x))}{x.\log_5(x)}\,dx = \ln(5)\int \frac{\ln(u)-\ln(\ln(3))}{u}\,du = \ln(5)\left[\frac{(\ln(u))^2}{2} - \ln(\ln(3)).\ln(u)\right] =$

$= \ln(5)\left[\frac{(\ln(\ln(x)))^2}{2} - \ln(\ln(3)).\ln(\ln(x))\right] + C$;

27g) poniendo $u = x^2 \Rightarrow \int x.7^{(x^2)}\,dx = \frac{1}{2}\int 7^u du = \frac{7^u}{2.\ln(7)} = \frac{7^{(x^2)}}{2.\ln(7)} + C$;

27h) observando que $(\ln(5x^2))^2 = [\ln(5)+2.\ln(x)]^2 = (\ln(5))^2+4.\ln(5).\ln(x)+4(\ln(x))^2$
y poniendo $u = \ln(x)$ se obtiene :

$$\int \frac{3.(\ln(5x^2))^2}{x}\,dx = 3\int [(\ln(5))^2+4.\ln(5).u+4u^2]\,du =$$

$=3(\ln(5))^2u +6.\ln(5)u^2+ 4u^3 = 3(\ln(5))^2\ln(x) +6.\ln(5)(\ln(x))^2+ 4(\ln(x))^3 + C$;

27i) observando que $(x.\ln(x))' = \ln(x) + 1$, pondremos $u = x.\ln(x)$ y se obtiene :

$$\int \frac{1+\ln(x)}{x.\ln(x)}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln(u) = \ln(x.\ln(x)) + C ;$$

27j) $\int \frac{1+\ln(x)}{x.\log_{10}(x)}\,dx = \ln(10)\int \frac{1+\ln(x)}{x.\ln(x)}\,dx = \ln(10).\ln(x.\ln(x)) + C$;

27k) poniendo $\operatorname{sen}(x) = u$ se tiene : $\sqrt{5 - 4.\operatorname{sen}(x) - 4.\cos^2(x)} = \sqrt{(1-2u)^2} = |1-2u|$;

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{5 - 4.\operatorname{sen}(x) - 4.\cos^2(x)}\right)\cos(x)dx = \int_0^1 |1-2u|\,du = \int_0^{1/2}(1-2u)\,du + \int_{1/2}^1(2u-1)\,du =$$

$$[u - u^2]_0^{1/2} + [u^2-u]_{1/2}^1 = \frac{1}{2} .$$

Universidad Simón Bolívar
Depto. de Matemáticas
Puras y Aplicadas

EJERCICIOS SOBRE INTEGRACION POR PARTES

28) Calcule las siguientes integrales, usando, cuando conveniente, el método de integración "por partes" . Recuerde la fórmula ; $\int u(x)\, v'(x)\, dx = u(x).v(x) - \int u'(x).v(x)\, dx$

[o, en términos de diferenciales : $\int u.dv = u.v - \int v.du$] .

28a) $\int x.\ln(x)\, dx$; **28b**) $\int x.\text{sen}(x)\, dx$; **28c**) $\int 2x.\cos(3x)\, dx$;

28d) $\int 7x.e^{ax}dx$; **28e**) $\int x.e^{(x^2)}dx$; **28f**) $\int x^3.e^{(x^2)}dx$;

28g) $\int \text{arctg}(x)\, dx$; **28h**) $\int \ln(x)dx$; **28i)** $\int x^2 \ln(x)\, dx$; **28j**) $\int x.(\ln(x))^2 dx$;

28k) $\int x.10^x dx$; **28l)** $\int \log_2(x)\, dx$; **28m**) $\int x^2 \text{arctg}(x)\, dx$; **28n**) $\int x.\sec^2(x)\, dx$.

29) Sea $I_n = \int (\ln(x))^n dx$;

29a)integrando por partes, demuestre la fórmula de reducción :

$$I_n = x.(\ln(x))^n - n.I_{n-1} \text{ ;}$$

29b) usando la fórmula 29a) , halle $\int (\ln(x))^3 dx$.

30) Calcule la integral $H_3 = \int (\sec(x))^3\, dx$,

conociendo que $\int (\sec(x))\, dx = \ln(\sec(x)+\tan(x)) + C$.

Sugerencia : escriba $(\sec(x))^3 = \sec(x).(\sec(x))^2$ e integre por partes tomando
$u(x) = \sec(x)$, $v'(x) = (\sec(x))^2$:

$H_3 = \sec(x).\tan(x) - \int \tan^2(x).\sec(x)\, dx = \sec(x).\tan(x) - \int (\sec^2(x) - 1).\sec(x)\, dx =$

$= \sec(x).\tan(x) - \int \sec^3(x)\, dx + \int (\sec(x))\, dx = \sec(x).\tan(x) - H_3 + \int (\sec(x))\, dx$

luego despeje H_3 de la igualdad $H_3 = \sec(x).\tan(x) - H_3 + \int (\sec(x))\, dx$.

Universidad Simón Bolívar
Depto. de Matemáticas
Puras y Aplicadas

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS 28 hasta 30.

28a) $\frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4} + C$; **28b**) $\operatorname{sen}(x) - x.\cos(x) + C$;

28c) $\frac{2x.\operatorname{sen}(3x)}{3} + \frac{2}{9}\cos(3x) + C$; **28d**) $\frac{7e^{ax}}{a^2}(ax-1) + C$;

28e) $\frac{e^{(x^2)}}{2} + C$; **28f**) $\frac{e^{(x^2)}}{2}(x^2-1) + C$;

28g) $x.\arctan(x) - \ln(\sqrt{1+x^2}) + C$; **28h**) $x.\ln(x) - x + C$;

28i) $\frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{x^3}{9} + C$; **28j**) $\frac{x^2(\ln(x))^2}{2} - \frac{x^2\ln(x)}{2} + \frac{x^2}{4} + C$;

28k) $\frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1) + C$; **28l**) $\frac{x.\ln(x) - x}{\ln(2)} + C$;

28m) $\frac{x^3}{3}.\arctan(x) - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\ln(1+x^2) + C$;

28n) $x.\tan(x) + \ln|\cos(x)| + C$.

29a) $I_n = \int (\ln(x))^n dx = x.(\ln(x))^n - n.I_{n-1}$;

29b) $I_3 = x(\ln(x))^3 - 3x(\ln(x))^2 + 6x.\ln(x) - 6x + C$.

30) $H_3 = \int \sec^3(x)\, dx = \frac{1}{2}[\sec(x).\tan(x) + \ln(\sec(x) + \tan(x)] + C$.

EJERCICIOS SOBRE FUNCIONES HIPERBOLICAS

Recordemos que se definen las funciones "seno hiperbólico" y "coseno hiperbólico " en la manera siguiente : $\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^x}{2}$, $\cosh(x) = \frac{e^x + e^x}{2}$.

31a) Demuestre que senh(x) ' = cosh(x) , cosh(x) ' = senh(x) ;

31b) demuestre que senh(x) es una función inyectiva y que su inversa está definida por la fórmula : $\operatorname{arcsenh}(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$;

31c) demuestre que la función cosh(x) no es inyectiva ;

31d) demuestre que la función $\cosh^*(x) : [0, +\infty) \longrightarrow [1, +\infty)$, [obtenida restringiendo el dominio de cosh(x) al conjunto de los números reales no negativos] , tiene función inversa , definida por la fórmula : $\operatorname{arccosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$;

31e) demuestre que $(\operatorname{arcsenh}(x))' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $(\operatorname{arccosh}(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$;